受験数学基礎力チェック

名前＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1. $x = \dfrac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{7}}$,　$y = \dfrac{1}{\sqrt{11}-\sqrt{7}}$ のとき、x^2+y^2 の値を求めよ。

考え方　x, y を有理化して、基本対象式 $x+y, xy$ を作り、$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ から x^2+y^2 の値を計算する。

○　解答

$$x = \frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{11}-\sqrt{7}}{\sqrt{11}-\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{11}-\sqrt{7}}{4}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{11}-\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{11}+\sqrt{7}}{\sqrt{11}+\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{11}+\sqrt{7}}{4}$$ より

$$x+y = \frac{2\sqrt{11}}{4} = \frac{\sqrt{11}}{2} \qquad xy = \frac{11-7}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

よって、$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=\left\{\dfrac{\sqrt{11}}{2}\right\}^2-2\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{11-2}{4}=\underline{\dfrac{9}{4}}$

2. 円 C $x^2+y^2=4$ と傾きが k の直線 l　$kx-y-2k+2=0$ がある。次の問いに答えよ。

(1)　円 C の中心と半径を求めよ。

(2)　直線 l は k の値にかかわらず定点を通る。定点の座標を求めよ。

(3)　直線 l が円 C と 2 点で交わるという。この 2 点間の距離が $2\sqrt{3}$ のときの k の値を求めよ。

考え方　　図画描けるものは図を描くと見通しがよくなる。(1) は基本問題。

(2) は　$(k$ に関係ない項$)=k(k$ に関係する項$)$　に変形する。

(3) は「点と直線の距離」の公式がヒント。

○　解答

(1)　中心 $(0,0)$、半径 2

(2)　直線 l は　$(y-2)=k(x-2)$ より、k の値に関わらず点 $(2,2)$ を通る。

よって 定点は $(2,2)$

(3)　直線 l が円 C と交わる 2 点を x 座標の小さい方から P、Q とおく。また、P,Q の中点を M、円の中心を O とおくと、$\triangle OPQ$ は $OP=OQ=2$ の二等辺三角形である。

よって、$PM=QM=\dfrac{1}{2}PQ=\sqrt{3},\ \ PQ\perp OM$

以上のことから、$OM=1$ で、これは直線 l と原点との距離のことである。

よって、　$\dfrac{|k\cdot 0-0-2k+2|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=1$

両辺を 2 乗、　$|-2k+2|^2=(\sqrt{k^2+1})^2$

整理して、　$3k^2-8k+3=0$

解いて、　$k=\dfrac{8\pm\sqrt{64-36}}{6}=\cdots=\dfrac{4\pm\sqrt{7}}{3}$

3. 表が出る確率が $\dfrac{2}{3}$、裏が出る確率が $\dfrac{1}{3}$ であるコインがある。これを用いて「3 回表が出たら終わり」というゲームを行う。このとき、ちょうど 5 回の試行でゲームが終わる確率を求めよ。

考え方　　3 回表が出れば次の試行は行わない点に注目する。すなわち、表を○、裏を×で表わすとき、○○○は 3 回目で試行が終了し 4 回目は行わないということ。

○　解答

コインの表裏をそれぞれ○×で表わすとする。問題は「ちょうど」5 回目の試行でゲームがおわることから、4 回目の試行までで○○××で 5 回目に○が出て終わればよい。4 回目までの○○××はどの順番でもよいので、求める確率は

$${}_4C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{2}{3}=\frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\underline{\frac{16}{81}}$$

4. 曲線 $C\quad y=x^3-3x$ と、点 $A(1,-3)$ がある。点 A を通り曲線 C に接する直線の方程式を求めよ。

考え方　　接線の方程式は接点が定まれば求めることができる。ここでは「点 A は通過する点」であり、接点ではないことから接点を仮定するところから始まる。

○　解答

曲線 C の式を微分すると $y'=3x^2-3$

そこで、接点を $P(t,t^3-3t)$ とおくと P における接線の方程式は、

$$y-(t^3-3t)=(3t^2-3)(x-t)$$

展開して整理して、

$$y=(3t^2-3)x-2t^3 \qquad \cdots\cdots \quad ①$$

と書ける。これが点 $A(1,-3)$ を通ることから代入して、

$$-3=(3t^2-3)\cdot 1-2t^3$$

整理して

$$0=t^2(-2t+3) \qquad \text{から、} \qquad t=0,\quad \frac{3}{2}$$

これを ① へ戻して、求める接線の方程式は

$t=0$ のとき、　$\underline{y=-3x}$

$t=\dfrac{3}{2}$ のとき、$\underline{y=\dfrac{15}{4}x-\dfrac{27}{4}}$　　　である。